**Réductions algébriques**

**Polynômes d’endomorphismes et de matrices**

**Polynôme d’endomorphismes**

Définition : Soient

On appelle évaluation (ou valeur) de en l’endomorphisme défini par :

Propriété : Soit

Alors

Propriété : Soit , alors est stable par addition, multiplication par un scalaire et composition.

**Polynômes annulateurs**

Définition : On appelle polynôme annulateur de tout tel que :

Théorème : ⍟

Soit . Les valeurs propres de figurent parmi les racines (dans ) de tout polynôme annulateur de , c’est-à-dire :

Si est annulateur de ,

Théorème de Cayley-Hamilton : Soient un -ev de dimension finie et . Le polynôme caractéristique de est annulateur de , c’est-à-dire :

**Polynômes de matrices**

Définition : Soient

On appelle évaluation (ou valeur) de en la matrice définie par :

Propriété : Soit

Alors

Définition : On dit que est un polynôme en si tel que  :

Définition : On appelle polynôme annulateur de tout tel que :

Propriété : ⍟

Soient . Si et sont semblables, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Théorème : Soient

Si est annulateur de , alors

Théorème de Cayley-Hamilton : Soit . est annulateur de .

**Polynôme minimal**

Note : est un -ev de dimension finie

Définition : (polynôme minimal)

Soit . Il existe un unique polynôme tel que :

1. est annulateur de
2. est unitaire
3. non nul annulateur de ,

Le polynôme est appelé polynôme minimal de

Remarque : cette définition se transpose aux matrices.

Théorème : ⍟

Soit . divise tout polynôme annulateur de

Théorème : Soit Les valeurs propres de sont exactement les racines dans de ie :

Remarque : ce théorème se transpose aux matrices

**Réductions & polynômes annulateurs**

est un -ev de dimension finie

Théorème de Bézout : Soient

et sont premiers entre eux

, tel que

Lemme des noyaux : Soient premiers entre eux. Alors

Corollaire : Soit , 2 à 2 premiers entre eux, alors

**Diagonalisabilité**

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. est diagonalisable
2. Il existe un polynôme annulateur de scindé à racines simples sur
3. est scindé à racines simples sur

**Réduction d’un endomorphisme induit**

Propriété : Soit et un sev de stable par .

1. Le sev est stable par tout polynôme en et
2. Le polynôme minimal de divise , ie

Théorème : Soient et un sev de stable par .

Si est diagonalisable, alors l’est également.

Théorème : Soient diagonalisables tels que .

Alors il existe une base de qui diagonalise et en même temps

On l’appelle base de codiagonalisation.

Propriété : Soient diagonalisables dans telles que .

Alors telle que et sont diagonales.

**Trigonalisabilité**

Théorème : Soit . On a équivalence entre

1. est trigonalisable
2. Il existe un polynôme annulateur qui est scindé sur .
3. Le polynôme minimal de est scindé sur .

Remarque dans la démo, on note , avec tous les 2 à 2

On a aussi noté l’espace caractéristique associé à , et en notant , on peut trouver une base de tel que , base de

Cela permet d’écrire , avec une matrice diagonale, et une matrice nilpotente.

On a alors .

Pour trouver une telle base de trigonalisation, on utilise le fait que ,

Donc on commence par chercher une base de , notée et on la complète de manière à avoir une base de de sorte que

Remarque : à partir du résultat précédent, on peut montrer que ,

Corollaire : Si est trigonalisable, alors est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc est de la forme avec une matrice nilpotente .

Corollaire : Si est trigonalisable et est un sev de stable par , alors l’endomorphisme induit par sur est trigonalisable.

Démonstration : on a vu or est scindé sur car est trigonalisable.

Donc est aussi scindé sur donc est trigonalisable.